14/10/2019 (1)

Φυσική αναπαραμέτρηση ή αναπαρ. με το μήκος τόξου για κανονικές καμπύλες:

Ορισμός: Έστω $c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ για $t_0 \in I$

(*) αν ήταν εδώ το $c(t)$ τότε θα είχε ένα "–" μπροστά και θα ήταν ≤ 0 άρα όχι μήκος.

$$c(t) = (x(t), y(t)), \; t \in I.$$

Η συνάρτηση $s: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $s(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| \, du$ καλείται <u>μήκος τόξου</u> <u>της καμπύλης c, με αφετηρία $t_0 \in I$</u>.

Η $s = s(t)$ είναι παραγωγίσιμη με $\frac{ds}{dt}(t) = \|c'(t)\| > 0, \; \forall t \in I$. Σύμφωνα με το θεώρημα Αντίστρ. συνάρτησης η συνάρτηση $s = s(t)$ αντιστρέφεται: $t = f(s)$, όπου f είναι διαφορ., $\frac{df}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} > 0$. Η σύνθεση f ορίζει την αναπαρ.

$$\bar{c} = c \circ f. \;//$$

Η αναπαράσταση $\bar{c} = c \circ f$ καλείται αναπαρ. της κανονικής καμπύλης c με φυσική παράμετρο ή με παράμετρο του μήκους τόξου.

NO: 2
DATE:

2: Σύμβαση: α) αντί για $\bar{c}$ θα γράφω c.
β) παράγωγος ως προς t, θα συμβολίζεται με
$\frac{d}{dt} = {}'$, $\frac{d^2}{dt^2} = {}''$, κ.ο.κ.
γ) παράγωγος ως προς c θα συμβολίζεται με: $\dot{} = \frac{d}{ds}$,
$\ddot{} = \frac{d^2}{ds^2}$, κ.ο.κ.

Το διάνυσμα ταχύτητας της $\bar{c}=c$ είναι $\dot{c} = \frac{dc}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{dc}{dt} = \frac{dt}{ds}c' = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}c' = \frac{c'}{\|c'\|}$

* Η συνάρτηση f δεν είναι μοναδική διότι αν αλλάξω αφετηρία τότε

Έτσι $\int_{t_1}^{t}\|c'(u)\|du = \int_{t_1}^{t_0}\|c'(u)\|du + \int_{t_0}^{t}\|c'(u)\|du$

<u>Πρόταση</u>: Κάθε κανονική καμπύλη δέχεται αναπ/ση με παράμετρο το μήκος τόξου και ταχύτητα 1.

<u>Πρόταση</u>: Μια κανονική καμπύλη έχει ως παράμετρο το μήκος τόξου αν η ταχύτητά της είναι 1 παντού.

<u>Απόδ.</u>

Έστω $c(t)$ κανονική καμπύλη με παράμετρο $t\in I$ και $\|c'(t)\| = 1, \forall t\in I$.

Το μήκος τόξου της c με αφετηρία $t_0\in I$ είναι

$s=s(t)=\int_{t_0}^{t}\|c'(u)\|du = \int_{t_0}^{t} 1\,du = t-t_0$, $\boxed{s=t-t_0}$, t μήκος τόξου.

<u>Παρατήρηση</u>: $\|\dot{c}(s)\| = 1, \forall s.$

Κριτήριο: Μια καμπύλη έχει φυσική παράμετρο $\Leftrightarrow$ $\|c'\| = 1$.

<u>Παράδειγμα</u>: Θεωρώ την καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$
$c(t) = (\underbrace{r\cos t}_{x(t)}, \underbrace{r\sin t}_{y(t)}), t \in \mathbb{R}$. Είναι λεία καμπύλη με διάνυσμα ταχύτητας $c'(t) = (-r\sin t, r\cos t), t \in \mathbb{R}$ με $\|c'(t)\| = r > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Άρα η c είναι κανονική!
Το μήκος τόξου c με αφετηρία $t_0 = 0$ είναι η συνάρτηση $S: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $S(t) = \int_0^t \|c'(u)\| du = \int_0^t r\,du \Rightarrow S = rt$
$\Leftrightarrow t = \frac{s}{r} = f(s)$ (βρίσκω την αντίστροφη αν υπάρχει ⊛)
Η αναπαρ.ιση της c με παράμετρο το μήκος τόξου να είναι $\underline{\underline{c(s)}} \overset{⊛}{=} c\left(\frac{s}{r}\right) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right), s \in \mathbb{R}$

<u>και</u> $\frac{dc}{ds}(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right)$

<u>και</u> $\|c'(s)\| = 1.$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, a, b: σταθερές θετικές.

Ισχύει $\dot{c} = \frac{c'}{\|c'\|}$.

Έχω ότι $c'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$

$\|c'(t)\| = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$

$$S = S(t) = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}\, du}_{?}.$$

▶ Έστω $c, \tilde{c} = T \circ c : I \to \mathbb{R}^2$ είναι γνωστές ισοδύναμες καμπύλες.

$T \in Isom(\mathbb{R}^2)$, $T = T_v \circ A$

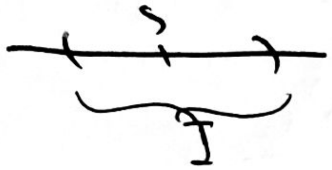
Ισχύει $\tilde{c}'(t) = A\, c'(t)$, $\forall t \in I$.

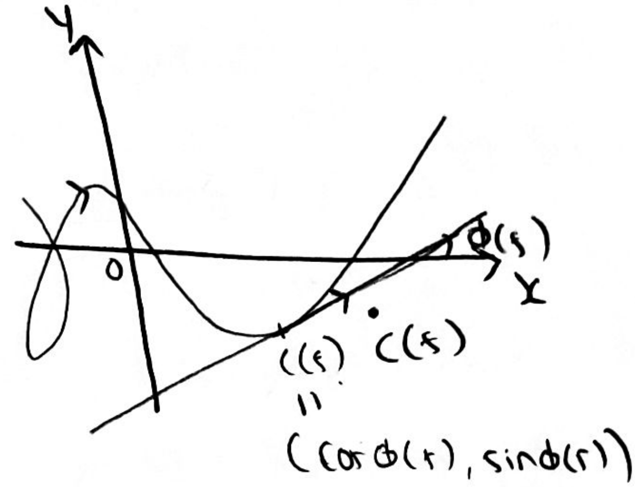
<u>A: ορθογ.</u> $\Rightarrow$ $\|\tilde{c}'(u)\| = \|c'(u)\| \Rightarrow$

$$\int_{t_0}^{t} \|\tilde{c}'(u)\| du = \int_{t_0}^{t} \|c'(u)\| du.$$

Καμπυλότητα καμπυλών του $\mathbb{R}^2$ με φυσική παράμετρο:

Έστω $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$





Το διάνυσμα ταχύτητας : $\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$, $\|\dot{c}(s)\|^2 = 1 \Leftrightarrow (\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 = 1$

(* Δεν έχουμε πρόβλημα διαφορισιμότητας //.)

$\phi(s)$ = γωνία που σχηματ. το $\dot{c}(s)$ με τον Ox.

NO:
DATE:

Ορισμός: Έστω $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, C^2 καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$. Καλούμε καμπυλότητα της c την συνάρτηση $k : I \to \mathbb{R}$, με

$$k(s) = \frac{d\phi}{ds}(s) = \dot{\phi}(s),$$

όπου $\phi(s) = \angle(\dot{c}(s), Ox)$

- $c(s) = (x(s), y(s))$
  $\dot{c}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

και αν $\|\dot{c}(s)\| = 1 \Leftrightarrow (\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 = 1$

Λήμμα: Έστω C^1 συναρτήσεις $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τ.ω

$f^2(t) + g^2(t) = 1, \ \forall t \in I.$

Τότε για $t_0 \in I$ και $\phi_0 \in \mathbb{R}$ με $f(t_0) = \cos\phi_0$, $g(t_0) = \sin\phi_0$ υπάρχει ΜΟΝΑΔΙΚΗ C^1 συνάρτηση $\phi : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f(t) = \cos\phi(t)$, $g(t) = \sin\phi(t)$ και $\phi(t_0) = \phi_0$.

Απόδ

Ορίζω την $\phi : I \to \mathbb{R}$, C^1 συνάρτηση με $\phi(t) = \phi_0 + \int_{t_0}^{t} (f(\sigma) g'(\sigma) - \ldots$

Αρκεί ν.δ.ο: $(f(t) - \cos\phi(t))^2 + (g(t) - \sin\phi(t))^2 = 0$

$\iff 2 - 2f(t)\cos\phi(t) - 2g(t)\sin\phi(t) = 0$

$\iff h(t) = f(t)\cos\phi(t) + g(t)\sin\phi(t) = 1, \ \forall t$

$\overset{\text{παραγ.}}{\iff}$ $\boxed{f \cdot f' + g \cdot g' = 0}$

Άρα $h(t) = \text{σταθ.}$

$h(t_0) = \cos^2\phi_0 + \sin^2\phi_0 = 1.$

- Έστω ότι υπάρχουν 2 διαφορετικές συναρτήσεις $\phi(s), \tilde{\phi}(s)$ ώστε:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \cos\phi(s) = \cos\tilde{\phi}(s) \\ \dot{y}(s) = \sin\phi(s) = \sin\tilde{\phi}(s) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists \ \lambda(s) \in \mathbb{Z}$ ώστε $\tilde{\phi}(s) = \phi(s) + 2\lambda(s)\pi.$

$\lambda(s) = \dfrac{\tilde{\phi}(s) - \phi(s)}{2\pi} = \text{σταθερή}$ λόγω συνέχειας.

Έτσι $\tilde{\phi}(s) = \phi(s) + 2\lambda\pi \Rightarrow \dfrac{d\tilde{\phi}}{ds} = \dfrac{d\phi}{ds}.$

Υπολογισμός καμπυλότητας:

$$\boxed{\dot x(s)=\cos\phi(s),\ \dot y(s)=\sin\phi(s)}$$

$$\begin{cases}\ddot x(s)=-\dot\phi(s)\sin\phi(s)=-\kappa(s)\dot y(s)\\ \ddot y(s)=\dot\phi(s)\cos\phi(s)=\kappa(s)\dot x(s)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ddot x=-\kappa\dot y\\ \ddot y=\kappa\dot x\end{cases}$$

Παρατηρώ ότι $\dot x\ddot y-\dot y\ddot x=\kappa(\dot x)^2+\kappa(\dot y)^2=\kappa((\dot x)^2+(\dot y)^2)$

<u>Πρόταση</u>: Η καμπυλότητα της καμπύλης $c(s)=(x(s),y(s))$ είναι η συνάρτηση: $\kappa=\dot x\ddot y-\dot y\ddot x$

NO:
DATE:

▶ Στροφή στον $\mathbb{R}^2$ κατά θ:

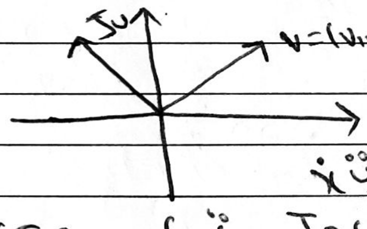
$$R_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Ισχύει ότι $R_\theta\circ R_\omega=R_{\theta+\omega}$, όπου $\theta=\omega=\pi/2$.

Έτσι: $R_{\pi/2}\circ R_{\pi/2}=-Id$.

Η στροφή $R_{\pi/2}$ συμβολίζεται με J και καλείται μιγαδική δομή του $\mathbb{R}^2$.

Έχω ότι $J:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $J(v_1,v_2)=(-v_2,v_1)$



$J^2=-Id$

$J\dot c=J(\dot x,\dot y)=(-\dot y,\dot x)$

$$\dot x\ddot y-\ddot x\dot y=\langle J\dot c,\ddot c\rangle$$

Έστω $c,\tilde c$ = τοπ. διαφ. ισοδύναμες καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$, αμφότερες με παράμετρο το μήκος τόξου $s\in I$

$T\in Isom(\mathbb{R}^2)\Rightarrow T=T_v\circ A$.

$\dot{\tilde c}=A\dot c$, $\ddot{\tilde c}=A\ddot c$

Η καμπυλότητα της c είναι $\kappa=\langle\ddot c,J\dot c\rangle$

Η καμπυλότητα της $\tilde c$ είναι $\tilde\kappa=\langle\ddot{\tilde c},J\dot{\tilde c}\rangle$

, άρα $\kappa=\dot x\ddot y-\ddot x\dot y=\langle\ddot c,J\dot c\rangle$ <u>και</u>

$\tilde\kappa=\langle A\ddot c,J(A\dot c)\rangle$

$=\langle A\ddot c,J\circ A(\dot c)\rangle$

Ισχύει $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Επίσης $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Έτσι απέδειξα την παρακάτω πρόταση:

<u>Πρόταση:</u> $\tilde{k} = k$ αν T διατηρεί προσ/μο
$\tilde{k} = -k$ αν T <u>δεν</u> διατηρεί προσ/μ

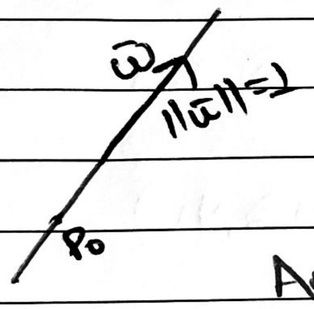
▶ <u>Ευθεία:</u> $c(s) = P_0 + s\vec{\omega}$

$c'(s) = \bar{\omega} \Rightarrow \|c'(s)\| = 1$

$s =$ μήκος τόξου

$\dot{c}(s) = \vec{\omega}$

$\ddot{c}(s) = 0$



Άρα $\boxed{k = 0}$

▶ <u>Κύκλος:</u> $c(s) = (\underbrace{r\cos\frac{s}{r}}_{x(s)}, \underbrace{r\sin\frac{s}{r}}_{y(s)})$

Έτσι $\dot{x}(s) = -\sin\frac{s}{r}$, $\dot{y}(s) = \cos\frac{s}{r}$

$\ddot{x}(s) = -\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}$, $\ddot{y}(s) = -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}$

$k(s) = \frac{1}{r}\sin^2\frac{s}{r} + \frac{1}{r}\cos^2\frac{s}{r} \Rightarrow$

$$\boxed{k(s) = \frac{1}{r}, \forall s}$$